۲-۱۲ کرل $\underline{E}$ یا شکل دیفرانسیلی قانون فارادی

رابطهٔ کرل میدان الکتریکی قانون فارادی نام دارد که یکی از چهار معادلهٔ ماکسول نیز هست. برای به دست آورد $\nabla\times\underline{E}$ ، در رابطهٔ میدان الکتریکی $(\underline{E}(\underline{r})=\int\frac{\rho_v(\underline{r}')dv'}{۴\pi\epsilon_۰ R^۳}\underline{R})$ به جای $\frac{\underline{R}}{R^۳}$ قرار می‌دهیم $-\nabla(\frac{۱}{R})$ (مثال ۳۰-۱ فصل ۱ را ببینید.) و از طرفین رابطه کرل می‌گیریم.

$$\nabla\times\underline{E}(\underline{r})=\nabla\times\int\frac{\rho_v(\underline{r}')dv'}{۴\pi\epsilon_۰ R^۳}\,(-\nabla(\frac{۱}{R}))$$

چون کرل نسبت به متغیرهای بدون پریم و انتگرال نسبت به متغیرهای پریم‌دار است، می‌توان جای آنها را عوض کرد. یعنی

$$\nabla\times\underline{E}(\underline{r})=-\int\frac{\rho_v(\underline{r}')dv'}{۴\pi\epsilon_۰ R^۳}\,\nabla\times(\nabla(\frac{۱}{R}))$$

چون کرلِ گرادیان هر میدان اسکالر برابر صفر است، درنتیجه $\nabla\times\underline{E}=۰$ است.

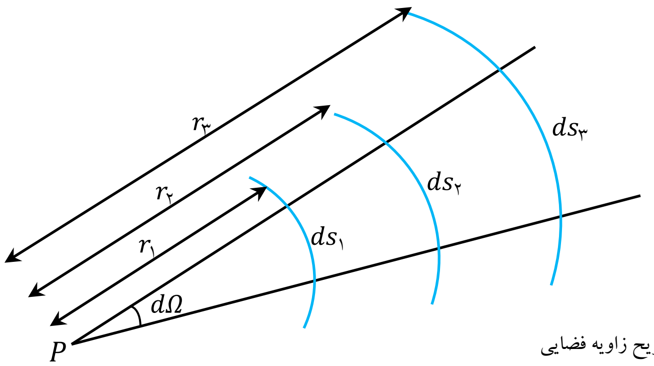
با گرفتن انتگرال سطحی یا حجمی از دو طرف شکل دیفرانسیلی معادلات ماکسول و استفاده از قضیهٔ استوکس $(\oint\underline{A}.d\underline{\ell}=\int_s(\nabla\times\underline{A}).d\underline{s})$ یا قضیهٔ دیورژانس $(\oint_s\underline{A}.d\underline{s}=\int_v\nabla\times\underline{A}\,dv)$ می‌توان شکل انتگرالی معادلات ماکسول را به دست آورد. در اینجا داریم

$$\nabla\times\underline{E}=۰\xrightarrow{\text{گرفتن انتگرال سطحی}}\int(\nabla\times\underline{E}).d\underline{s}=۰\xrightarrow{\text{قضیه استوکس}}\oint_c\underline{E}.d\underline{\ell}=۰$$

که شکل انتگرالی قانون فارادی برای میدان‌های ساکن است.

۲-۱۳ زاویهٔ فضایی

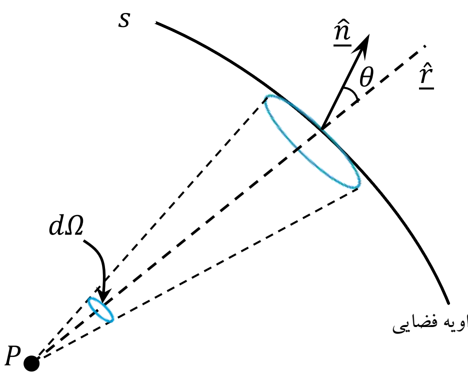
سطح مخروطی را در نظر بگیرید که توسط کُره‌هایی به مرکز رأس مخروط (P) قطع شود. نسبت سطحِ قاعده (ds_i) به مجذور شعاع کُره $(r_i^۲)$ مقدار ثابتی است که نشان دهندهٔ میزان بازشدگی مخروط است، این مقدار ثابت بیانگر زاویهٔ فضایی $d\Omega$ است.



$$d\Omega=\int\frac{ds}{r^۲}=\int\frac{r^۲\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{r^۲}=\int\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

شکل ۲-۱۴تشریح زاویه فضایی

برای یک کُرهٔ کامل $\Omega=۴\pi$ استرادیان است، یعنی زاویهٔ فضایی که تمام سطح کُره با آن دیده می‌شود ۴π استرادیان است. لازم به ذکر است که نیازی نیست که مخروط حتماً با سطح کُروی قطع شود، در حالت کُلی



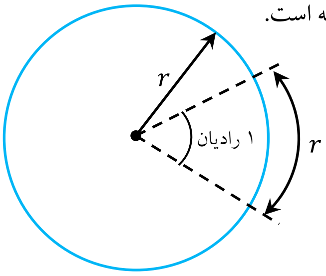
$$\Omega=\int_s\frac{\hat{\underline{r}}.d\underline{s}}{r^۲}=\int_s\frac{\hat{\underline{r}}.\hat{\underline{n}}ds}{r^۲}$$

شکل ۲-۱۵تشریح حالت کُلی زاویه فضایی

Ω زاویه‌ای است که سطحِ s از نقطهٔ P با آن دیده می‌شود، همچنین در این رابطه، $\hat{\underline{r}}$ بُردار یکهٔ شعاعی از نقطهٔ P به هر نقطهٔ دلخواه از سطح و $\hat{\underline{n}}$ بُردار یکهٔ عمود بر سطح در آن نقطه می‌باشد.

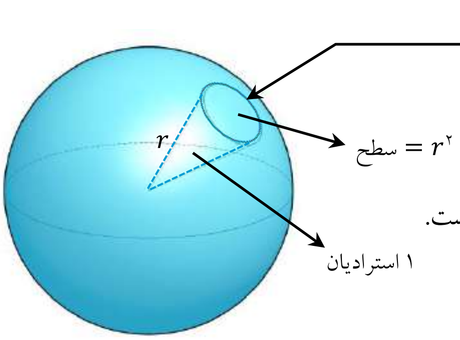
۲-۱۴ رادیان و استرادیان

زاویه در صفحه بر حسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود. در یک دایره به شعاع r، زاویه‌ای که طولِ کمان مقابل آن r باشد، یک رادیان است. با این تعریف مشخص است برای یک دایرهٔ کامل $\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ رادیان و برابر 360° است درنتیجه هر رادیان معادل ۵۷/۳ درجه است.



شکل ۲-۱۶ شکل هندسی برای تعریف رادیان

یک استرادیان (رادیان مربع)، زاویهٔ فضایی است که رأس آن در مرکز کُره‌ای به شعاع r قرار دارد و سطحی از کُره که در مقابل آن باشد، معادل با سطح مربعی به ضلع r باشد.



از آنجا که مساحت یک کُره به شعاع r برابر $4\pi r^2$ است، بنابراین یک کُره 4π استرادیان ($\frac{4\pi r^2}{r^2}$) است.

$$\text{۱ استرادیان} = 3283\,\square^\circ = (57/3^\circ)^2 = (\text{۱ رادیان})^2$$

شکل ۲-۱۷ شکل هندسی برای تعریف استرادیان

۲-۱۵ قانون گاوس

می‌دانیم کُل شار خارج شده از سطح بسته s عبارت است از

$$\psi = \oint_s \underline{E}.d\underline{s}$$

اگر این انتگرال صفر نشود، معنی آن این است که شار خالصی از این سطح خارج می‌شود و چون بُعد شار و بار یکی است، می‌توان حدس زد باید بار خالصی در سطح بسته موجود باشد. این حدس را می‌توان بر پایه محکمی استوار کرد که قانون گاوس نام دارد.

فرض کنید بار نقطه‌ای q در مبدأ قرار دارد. بار q توسط یک سطح دلخواه محصور شده است، کُل شار گذرنده از این سطح عبارتند از

$$\psi = \oint_s \underline{E}.d\underline{s} = \oint_s E\underline{\hat{r}}.\underline{\hat{n}}ds = \oint_s \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\underline{\hat{r}}.\underline{\hat{n}}ds = \oint_s \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta\, ds$$

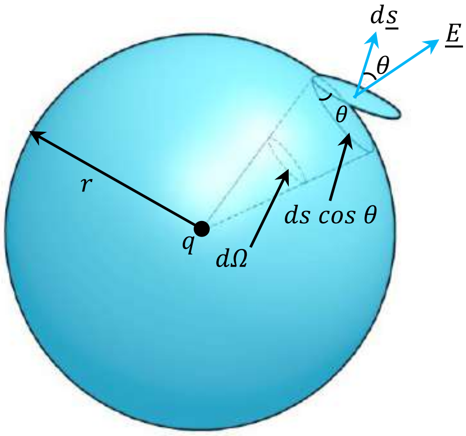
θ زاویهٔ بین بُردار یکهٔ عمود بر سطحِ $\underline{\hat{n}}$ و $\underline{\hat{r}}$ جهتِ شعاعی میدان الکتریکی $\underline{E}$ است.

عبارت $\cos\theta\, ds$ تصویر عنصر سطحِ ds روی کُره‌ای به شعاع r است، یعنی $\cos\theta\, ds = r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi$ درنتیجه

$$\psi = \oint_s \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cos\theta\, ds = \oint_s \frac{q\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\oint_s d\Omega$$

برای هر سطح بسته‌ای که بار q را به طور کامل بپوشاند، $\oint_s d\Omega = 4\pi$ درنتیجه $\psi = \frac{q}{\epsilon_0}$.

یعنی کُل شار خارج شده از یک سطح بسته در فضای آزاد، برابرِ بار داخل سطح تقسیم بر ϵ_0 است.



شکل ۲-۱۸ تشریح قانون گاوس

این نتیجه، قانون گاوس برای یک بار نقطه‌ای است، اگر بارِ داخل حجمِ محصور به سطحِ بستهٔ s به صورت یک مجموعهٔ گسسته از بارها باشد، قانون گاوس به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\oint_s \underline{E}.d\underline{s} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{enclosed}}{\epsilon_0}$$

برای چگالی بار پیوسته قانون گاوس به صورت زیر در می‌آید.

$$\oint_s \underline{E}.d\underline{s} = \int_v \rho_v \, dv$$

که v حجم محصور توسط سطحِ s است. قانون گاوس یکی دیگر از معادلات ماکسول است.

توجه کنید بارهای بیرون سطح در شارِ گذرنده از آن سطح هیچ تأثیری ندارد، چون هر شاری که از یک سمت به سطح وارد می‌شود از سمت دیگر خارج می‌شود.

در صورتی که داخل سطح بستهٔ دلخواهی مانند s، باری وجود نداشته باشد، می‌توان نتیجه گرفت $\oint_s \underline{E}.d\underline{s} = 0$، یعنی شار خروجی گذرنده از این سطح صفر است، اما تنها در صورتی که بتوانیم E را از انتگرال بیرون بیاوریم می‌توانیم نتیجه بگیریم میدان صفر است.

۲-۱۶ رابطهٔ قانون گاوس و قانون کولن

اگر بار q_1 را در مبدأ فرض کنیم و یک سطح کُروی به مرکز مبدأ در نظر بگیریم، داریم

$$\oint_s \epsilon_0 \underline{E}_1 . d\underline{s} = q_1$$

میدان تنها مؤلفه شعاعی دارد یعنی $\underline{E}_1 = E_1 \hat{\underline{r}}$

$$\oint_s \epsilon_0 E_1 \hat{\underline{r}}.\hat{\underline{r}} r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = 4\pi r^2 \epsilon_0 E_1 = q_1$$

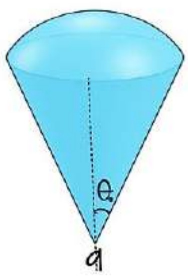
$$\underline{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\underline{r}}$$

حال اگر بار q_2 در میدان ناشی از بار q_1 قرار گیرد نیروی وارد بر آن برابر است با

$$\underline{F} = q_2 \underline{E}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\underline{r}}$$

که همان قانون کولن است، در واقع قانون گاوس بیان دیگری از قانون کولن است به همین علت است که در معادلات ماکسول فقط قانون گاوس وجود دارد.

توجه کنید قانون گاوس بستگی دارد به الف: قانون عکس مجذوری برای نیروی بین بارها **ب:** برهم‌نهی خطی اثر بارهای مختلف



مثال ۲-۳۳: بار q در رأس مخروطی قرار دارد و زاویهٔ رأس مخروط θ_0 است. کُل شاری $(\int \epsilon_0 \underline{E}.d\underline{s})$ که از قاعدهٔ مخروط می‌گذرد چقدر است.

حل: میدان ناشی از بار q به صورت $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{\underline{r}}$ است و چون $\hat{\underline{r}}.\hat{\underline{\theta}} = 0$ است، از سطح جانبی مخروط شاری نمی‌گذرد. شار گذرنده از قاعده، با شاری که از عرقچین کُروی شکل می‌گذرد برابر است. بنابراین

$$\psi = \int \epsilon_0 \underline{E}.d\underline{s} = \int \frac{q}{4\pi r^2}\hat{\underline{r}}.\hat{\underline{r}} r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$$
$$= \frac{q}{4\pi}\int_0^{\theta_0} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q}{2}(1 - \cos\theta_0)$$

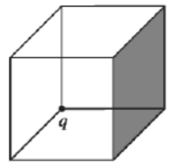
مثال ۲-۳۴: بار نقطه‌ای q روی محور دایره‌ای به شعاع a و به فاصلهٔ h از مرکز دایره قرار دارد. شاری که از دایره می‌گذرد را به دست آورید.

حل: اگر بار q را در مبدأ فرض کنیم، $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{\underline{r}}$ است. عنصر سطح دایره عبارت است از $d\underline{s} = \rho \, d\rho \, d\varphi \hat{\underline{z}}$. پس

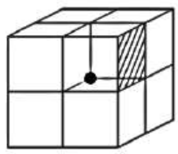
$$\psi = \int \underline{D}.d\underline{s} = \int \frac{q}{4\pi r^2}\hat{\underline{r}}.\rho \, d\rho \, d\varphi \, \hat{\underline{z}} = \int \frac{q}{4\pi(\rho^2 + h^2)}\rho \, d\rho \, d\varphi \cos\theta = \int \frac{qh \, \rho \, d\rho \, d\varphi}{4\pi(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qh}{4\pi}\left[\int_0^a \frac{\rho \, d\rho}{(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\varphi\right] =$$
$$\frac{qh}{2}\left[\frac{-1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}\Bigg|_0^a\right] = \frac{q}{2}\left[1 - \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}\right] = \frac{q}{2}(1 - \cos\theta_0)$$

که در این رابطه θ_0 زاویه‌ای است که لبهٔ دایره از محل بار دیده می‌شود.

مثال ۲-۳۵: بار q در گوشهٔ یک مکعب مطابق شکل زیر قرار گرفته است. شار گذرنده از سطح سایه‌دار چقدر است.



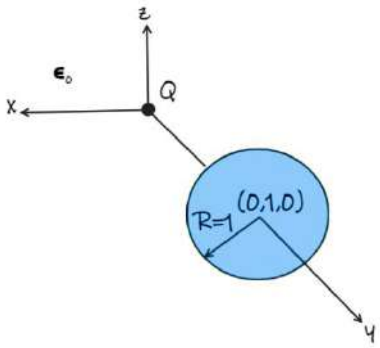
حل: فرض کنید این مکعب یکی از ۸ مکعبی است که مطابق شکل اطراف بار q قرار گرفته‌اند.



شار گذرنده از این مکعب بزرگ، برابر با شار گذرنده از ۲۴ مربع کوچک‌تر جانبی است، طوریکه سطح سایه‌دار نیز یکی از این ۲۴ سطح است. پس

$$\int_{\text{سطح سایه‌دار}} \underline{E}.d\underline{s} = \frac{۱}{۲۴}\oint_{\text{کل مکعب بزرگ}} \underline{E}.d\underline{s} = \frac{۱}{۲۴}\frac{q}{\epsilon_{\circ}}$$

مثال ۲-۳۶: بار نقطه‌ای Q واقع در مبدأ مختصات از سطح دایروی فرضی نشان داده شده در شکل، یک کولن شار الکتریکی عبور می‌دهد. شدت میدان الکتریکی ناشی از این بار در نقطهٔ $(۰,۱,۰)$ چند ولت بر متر است؟



حل: شار گذرنده از دایره به شعاع واحد شکل فوق $\frac{Q}{۲}(۱-\cos\theta_{\circ})$ است که مقدار این شار در صورت سؤال برابر یک کولن فرض شده است، همچنین $\cos\theta_{\circ} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است، بنابراین $Q = \frac{۴}{۲-\sqrt{۲}}$.
شدت میدان ناشی از این بار نقطه‌ای برای $r = ۱$ و با در نظر گرفتن $\frac{۱}{۳۶\pi}\times ۱۰^{-۹}$ برای $\epsilon_{\circ}$ ، برابر است با

$$E = \frac{۳۶}{۲-\sqrt{۲}}\times ۱۰^{۹}$$

مثال ۲-۳۷: بار نقطه‌ای $۴q$ در مبدأ مختصات و بار نقطه‌ای $-q$ در نقطهٔ $(d$ و ۰ و ۰$)$ قرار دارد. یک خط میدان که با زاویهٔ θ نسبت به محور z از $۴q$ جدا می‌شود به صورت عمود به محور z به بار $-q$ وارد می‌شود. مقدار θ چقدر است.

حل: شار داخل مخروطی با زاویهٔ θ که بار $+۴q$ در رأس آن قرار داشته باشد برابر $\frac{۴q}{۲}(۱-\cos\theta)$ است، از طرفی شاری که داخل این مخروط وجود دارد $\frac{q}{۲}$ است. (نیمی از خطوط شار با زاویهٔ کمتر از ۹۰ نسبت به محور z و نیمی با زاویهٔ بیشتر از ۹۰ به $-q$ وارد می‌شوند یا $(\psi = \frac{q}{۲}(۱-\cos ۹۰)$ در نتیجه

$$\frac{۴q}{۲}(۱-\cos\theta) = \frac{q}{۲} \Rightarrow \theta = \cos^{-۱}(\frac{۳}{۴}) = ۴۱/۵^{\circ}$$

۲-۱۷ محاسبهٔ میدان الکتریکی با استفاده از قانون گاوس

یک ویژگی عمومی قانون گاوس، این است که میدان الکتریکی در کُلیهٔ نقاط فضا را به دست می‌دهد. قانون گاوس برای هر نوع توزیع باری اعم از متقارن، نامتقارن، ساکن و متغیر با زمان معتبر است. در واقع این قانون همواره برقرار است اما برای محاسبهٔ میدان تنها زمانی به کار ما می‌آید که توزیع بار متقارن باشد.

یک توزیع بار پیوسته به شرطی تقارن کارتزین دارد که تنها به یکی از متغیرهای x، y یا z وابسته باشد. تقارن استوانه‌ای در صورتی وجود دارد که توزیع بار فقط به ρ بستگی داشته (و مستقل از z و φ) باشد و تقارن کُروی موقعی وجود دارد که بار تنها به r بستگی داشته (و مستقل از θ و φ) باشد.

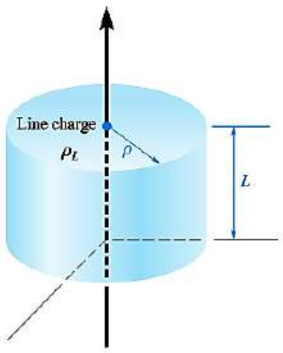
اگر چگالی بار تقارن نداشته باشد، شار همچنان $\frac{Q_{enc}}{\epsilon_{\circ}}$ باقی می‌ماند ولی نمی‌توانیم مطمئن شویم که $\underline{E}$ و $d\underline{s}$ هم‌جهت هستند و یا $|\underline{E}|$ ثابت است. در این وضعیت امکان بیرون کشیدن $|\underline{E}|$ از انتگرال وجود ندارد، بنابراین تقارن شرط لازم برای به کارگیری قانون گاوس در محاسبهٔ $\underline{E}$ محسوب می‌شود.

در استفاده از قانون گاوس باید سطح بسته‌ای موسوم به سطح گاوسی طوری انتخاب شود که دو شرط زیر را برآورده سازد

۱- $\underline{E}$ همه جا عمود یا مماس بر سطح بسته باشد تا اینکه $\underline{E}.d\underline{s}$ به ترتیب به صورت Eds یا صفر درآید.

۲- روی بخشی از سطح بسته که در آن $\underline{E}.d\underline{s}$ صفر نیست، E ثابت باشد. بدین ترتیب مجاز هستیم ضرب نقطه‌ای را با ضرب اسکالرهای E و ds جایگزین کرده و سپس E را از انتگرال بیرون بیاوریم.

مثال ۲-۳۸: بار الکتریکی بسیار طویلی با چگالی یکنواخت ρ_ℓ در امتداد محور z توزیع شده است، شدت میدان الکتریکی را در اطراف بار به دست آورید.



شکل ۲-۱۹سطح گاوسی برای بار خطی نامحدود

حل: کُلی‌ترین میدانی که می‌توان برای میدان ناشی از این بار در دستگاه مختصات استوانه‌ای در نظر گرفت به صورت زیر است.

$$\underline{E} = E_\rho(\rho,\varphi,z)\underline{\hat{\rho}} + E_\varphi(\rho,\varphi,z)\underline{\hat{\varphi}} + E_z(\rho,\varphi,z)\underline{\hat{z}}$$

یعنی میدان هر سه مؤلفه را دارد و هر مؤلفه تابعی از هر سه متغیر است.

اما میدان چنین باری نمی‌تواند مؤلفه z داشته باشد زیرا $\underline{\hat{z}}$ یا $-\underline{\hat{z}}$ از هیچ حیثی بر هم برتری ندارند، به عبارت دیگر توزیع بار داده شده باعث نمی‌شود یکی از دو جهت بر دیگری ارجح باشد. به دلیلی مشابه میدان نمی‌تواند مؤلفه φ داشته باشد. ولی جهت‌های $\underline{\hat{\rho}}$ و $-\underline{\hat{\rho}}$ تفاوت دارند، در جهت $\underline{\hat{\rho}}$ از بار دور و در $-\underline{\hat{\rho}}$ به بار نزدیک می‌شویم.

اکنون می‌دانیم میدان به صورت $\underline{E} = E_\rho(\rho,\varphi,z)\underline{\hat{\rho}}$ است. حال به پاسخ این سؤال می‌پردازیم که مؤلفه موجود تابعی از کدام متغیرها **نیست**.
تقارن نشان می‌دهد که میدان نمی‌تواند تابعی از φ و z باشد. اگر خود را در فضایی که این بار قرار دارد تصور کنیم، هیچ راهی برای این‌که بتوانیم نقاط دارای z یا φ متفاوت را از هم تشخیص دهیم وجود ندارد، ولی دو نقطهٔ دارای ρ متفاوت را به سادگی می‌توان از هم تشخیص داد درنتیجه داریم.

$$\underline{E} = E_\rho(\rho)\underline{\hat{\rho}}$$

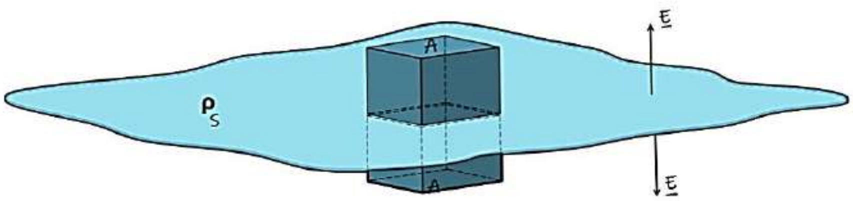
برای محاسبهٔ میدان ناشی از بار خطی بی‌نهایت با چگالی یکنواخت ρ_ℓ، سطح گاوسی مناسب یک پوستهٔ استوانه‌ای به شعاع ρ، هم‌محور با توزیع بار و ارتفاع ℓ است. روی این سطح میدان الکتریکی ثابت و در همه جا بر سطح عمود است.

با اعمال قانون گاوس داریم

$$\oint \underline{E}\,.\,d\underline{s} = \int E(\rho)\ \underline{\hat{\rho}}.\underline{\hat{\rho}}\ \rho d\varphi dz = E ۲\pi\rho l = \frac{l\rho_\ell}{\epsilon_۰} \Rightarrow \underline{E} = \frac{\rho_\ell}{۲\pi\epsilon_۰\rho}\underline{\hat{\rho}}$$

(توجه کنید $\int \underline{E}\,.\,d\underline{s}$ روی سطح بالا و پایین استوانه صفر است.)

مثال ۲-۳۹: شدت میدان الکتریکی یک ورق نامحدود با چگالی بار سطحی یکنواخت ρ_s که در صفحهٔ $z = ۰$ قرار داشته باشد را تعیین کنید.



شکل ۲-۲۰ به کارگیری قانون گاوس برای صفحهٔ باردار بی‌نهایت

توزیع بار، تقارن کارتزین دارد زیرا بار تنها به z وابسته (محدود شده) است. روشن است که میدان $\underline{E}$ ناشی از یک صفحهٔ بار بی‌نهایت عمود بر صفحه است.

به عنوان سطح گاوسی، یک مکعب مستطیل در نظر می‌گیریم که ورق باردار به صورت متقارن از وسط آن بگذرد، چون $\underline{E}$ بر ورق عمود است، اعمال قانون گاوسی نتیجه می‌دهد

$$\oint_s \underline{E}\,.\,d\underline{s} = \int_{\text{سطح بالا}} \underline{E}\,.\,d\underline{s} + \int_{\text{سطح پایین}} \underline{E}\,.\,d\underline{s} = \frac{q}{\epsilon_۰}$$

مشخص است $\int \underline{E}\,.\,d\underline{s}$ برای سطوح جانبی مکعب مستطیل صفر است زیرا $\underline{E}$ مؤلفه‌ای در جهت $\underline{\hat{x}}$ یا $\underline{\hat{y}}$ ندارد. اگر مساحت سطوح بالا و پایین برابر A باشد

$$\int E\ \underline{\hat{z}}.ds\ \underline{\hat{z}} + \int E\ (-\underline{\hat{z}}).ds\ (-\underline{\hat{z}}) = ۲EA$$

کُل بار محصور در جعبه برابر است با

$$q = \int \rho_s\, ds = \rho_s\, A$$

۱۰-٦ پتانسیل مغناطیسی اسکالر و بار مغناطیسی مقید معادل

از قانون آمپر به یاد داریم که $\nabla\times\underline{H}=\underline{J}$ است، لذا $\underline{H}$ یک میدان پایستار نیست؛ بنابراین مانند موردی که پتانسیل الکتریکی را تعریف کردیم، معرفی یک پتانسیل مغناطیسی اسکالر مفهومی ندارد. با این همه در صورتی که مغناطش دائم تنها منبع میدان باشد و جریان واقعی در یک ناحیهٔ محدود از فضا صفر باشد، قانون آمپر به صورت $\nabla\times\underline{H}=۰$ درمی‌آید. این موضوع باعث می‌شود که بتوانیم پتانسیل مغناطیسی اسکالر V_m (برحسب آمپر) را طوری تعریف کنیم که $\underline{H}=-\nabla V_m$ دقیقاً همانند $\underline{E}=-\nabla V$ در الکتروستاتیک باشد. برای رسیدن به رابطه‌ای برای V_m از پتانسیل مغناطیسی بُرداری شروع می کنیم. پتانسیل مغناطیسی بُرداری ناشی از مادهٔ مغناطیده را به صورت زیر به دست آوردیم

$$\underline{A}=\frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_{v'}\frac{\underline{M}'\times(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}dv'$$

با گرفتن کرل از رابطهٔ فوق، $\underline{B}$ را به دست می‌آوریم

$$\underline{B}=\nabla\times\underline{A}=\frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_{v'}\nabla\times\left[\underline{M}'\times\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}\right]dv'$$

بنا بر اتحاد $\nabla\times(\underline{A}\times\underline{B})=(\nabla.\underline{B})\underline{A}-(\nabla.\underline{A})\underline{B}+(\underline{B}.\nabla)\underline{A}-(\underline{A}.\nabla)\underline{B}$ و با فرض $\underline{A}=\underline{M}'$ ، $\underline{B}=\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}$ و توجه به اینکه چون ∇ روی مختصات بدون پریم عمل می کند، $\nabla.\underline{M}'$ ، $(\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}.\nabla)\underline{M}'$ صفر است، داریم

$$\nabla\times\left[\underline{M}'\times\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}\right]=\underline{M}'\nabla.\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}-(\underline{M}'.\nabla)\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}$$

پس

$$\underline{B}=\frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_{v'}\underline{M}'\,\nabla.\left[\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}\right]dv'-\frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_{v'}(\underline{M}'.\nabla)\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}dv'$$

در انتگرال اول چون $\nabla(\frac{۱}{|\underline{r}-\underline{r}'|})=-\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}$ و $\nabla.(\nabla(\frac{۱}{|\underline{r}-\underline{r}'|}))=\nabla^۲(\frac{۱}{|\underline{r}-\underline{r}'|})=-۴\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')$ است، داریم

$$\frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_{v'}\underline{M}(\underline{r}')[۴\pi\delta(\underline{r}-\underline{r}')]dv'=\mu_۰\underline{M}(\underline{r})\ \text{یا}\ \mu_۰\underline{M}$$

انتگرالدهٔ انتگرال دوم را با استفاده از اتحاد $\nabla(\underline{A}.\underline{B})=(\underline{A}.\nabla)\underline{B}+\underline{A}\times(\nabla\times\underline{B})+(\underline{B}.\nabla)\underline{A}+\underline{B}\times(\nabla\times\underline{A})$، به صورت زیر می‌نویسیم

$$\nabla(\underline{M}'.\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳})=(\underline{M}'.\nabla)\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}+\underline{M}'\times(\nabla\times\left[\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}\right])$$

$$\Rightarrow(\underline{M}'.\nabla)\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}=\nabla(\underline{M}'.\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳})-\underline{M}'\times(\nabla\times\left[\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}\right])$$

چون کرلِ گرادیان هر میدان اسکالری صفر است، جملهٔ دوم رابطهٔ فوق صفر می‌شود، پس

$$-\frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_{v'}(\underline{M}'.\nabla)\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}dv'=-\frac{\mu_۰}{۴\pi}\int_{v'}\nabla(\underline{M}'.\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳})dv'$$

بنابراین

$$\underline{B}=\mu_۰\underline{M}-\mu_۰\nabla\int_{v'}\frac{۱}{۴\pi}(\underline{M}'.\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳})\,dv'$$

مقایسهٔ نتیجهٔ بالا با $\underline{B}=\mu_۰\underline{M}+\mu_۰\underline{H}$ نشان می‌دهد که

$$\underline{H}=-\nabla\int_{v'}\frac{۱}{۴\pi}(\underline{M}'.\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳})\,dv'=-\nabla V_m$$

در نتیجه پتانسیل مغناطیسی اسکالر V_m (برحسب آمپر) ناشی از مادهٔ مغناطیسی در ناحیه‌ای که چگالی جریان در آنجا صفر است، برابر است با

$$V_m=\int_{v'}\frac{۱}{۴\pi}(\underline{M}'.\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳})\,dv'\quad,\quad \underline{J}=۰\ \text{به ازای}$$

از جواب به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت پتانسیل مغناطیسی اسکالر دوقطبی $\underline{m}=\underline{M}\,\Delta v$ واقع در $\underline{r}'$ در نقطهٔ $\underline{r}$ را می‌توان به صورت $V_m=\frac{\underline{m}.(\underline{r}-\underline{r}')}{۴\pi|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}$ نوشت. (مشابهٔ مورد الکتریکی $V=\frac{\underline{p}.(\underline{r}-\underline{r}')}{۴\pi\epsilon_۰|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}$)

به این ترتیب یک توزیع اختیاری جایگزیده (قرار گرفته در یک ناحیه محدود و مشخص از فضا) از مغناطش، از لحاظ مجانبی دارای یک میدان دوقطبی است با قدرتی که توسط گشتاور مغناطیسی کُلِ $\underline{m}$ مربوط به این توزیع مشخص می‌شود.

اگر در $\underline{H}=-\nabla\int_{v'}\frac{۱}{۴\pi}\left(\underline{M}'.\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳}\right)dv'$ از اتحاد $\nabla.(f\underline{A})=f\,\nabla.\underline{A}+\nabla f.\underline{A}$ و با فرض $f=\frac{۱}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ و $\underline{A}=\underline{M}'$ استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\nabla'.(\frac{\underline{M}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}) = \frac{۱}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\nabla'.\underline{M}' + \nabla'(\frac{۱}{|\underline{r}-\underline{r}'|}).\underline{M}'$$

چون $\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^۳} = \nabla'(\frac{۱}{|\underline{r}-\underline{r}'|})$ است، پس

$$V_m = \frac{۱}{۴\pi}\int \nabla'.(\frac{\underline{M}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|})dv' - \frac{۱}{۴\pi}\int \frac{\nabla'.\underline{M}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}dv'$$

انتگرال اول را با استفاده از قضیه دیورژانس به یک انتگرال سطح تبدیل می کنیم که می‌شود

$$V_m = \frac{۱}{۴\pi}\oint_{s'} \frac{\underline{M}'.\underline{\hat{n}}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}ds' + \frac{۱}{۴\pi}\int_{v'} \frac{-\nabla'.\underline{M}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}dv'$$

که v حجم جسم مغناطیده، s سطح در بَرگیرندهٔ حجم v و $\underline{\hat{n}}$ بردار یکهٔ عمود بر سطح جسم به سمت بیرون است. می‌توانیم $\rho_M = -\nabla.\underline{M}$ (برحسب آمپر بر متر مربع) را معادل یک بار حجمی و $\rho_{Ms} = \underline{M}.\underline{\hat{n}}$ (برحسب آمپر بر متر) را معادل یک بار سطحی در نظر بگیریم، در نتیجه می‌توانیم به‌جای جسم مغناطیده بارهای معادل ρ_M و ρ_{Ms} را قرار دهیم و با آن به صورت یک مسئله معمولی پتانسیل رفتار کنیم. ρ_M و ρ_{Ms} در مواد مغناطیسی همان نقشی که ρ_p و ρ_{ps} در دی الکتریک داشتند را ایفا می کنند.

در حال حاضر هیچ گواهی تجربی مبنی بر وجود بار مغناطیسی آزاد یا تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد، با وجود این، ρ_m و ρ_{ms} را برای بار مغناطیسی آزاد حجمی و سطحی کنار می‌گذاریم و بار مغناطیسی مقید حجمی و سطحی را با ρ_M و ρ_{Ms} نشان می‌دهیم. همچنین جریان مغناطیسی مقید را با $\underline{\mathcal{J}}_M$ و $\underline{\mathcal{J}}_{Ms}$ نشان داده $\underline{\mathcal{J}}_m$ و $\underline{\mathcal{J}}_{ms}$ را برای جریان مغناطیسی آزاد کنار می گذاریم.

شدت میدان مغناطیسی به شکل زیر از پتانسیل مغناطیسی اسکالر به دست می آید

$$\underline{H} = -\nabla V_m = \oint \frac{\rho'_{Ms}ds'}{۴\pi R^۳}\underline{R} + \int \frac{\rho'_M\,dv'}{۴\pi R^۳}\underline{R}$$

که در آن از $\nabla(\frac{۱}{R}) = -\frac{\underline{R}}{R^۳}$ استفاده شده است.

به طور خلاصه برای محاسبهٔ $\underline{H}$ با استفاده از پتانسیل مغناطیسی اسکالر، به‌جای جسم مغناطیده بارهای مغناطیسی را می‌گذاریم و فرض می‌کنیم که این بارها در فضای آزاد قرار دارند. پس از به دست آوردن $\underline{H}$ در داخل و خارج جسم، می‌توانیم $\underline{B}$ را حساب کنیم. در خارج جسم $\underline{B} = \mu_۰\underline{H}$ و در داخل جسم $\underline{B} = \mu_۰(\underline{H} + \underline{M})$ است. کُلی‌ترین حالت وقتی است که از مادهٔ مغناطیسی، جریان حقیقی عبور کند. در این صورت میدان مغناطیسی کُل، جمع $\underline{B} = \int \frac{\mu_۰\underline{\mathcal{J}}'\times\underline{R}}{۴\pi R^۳}dv'$ و میدان حاصل از مغناطش خواهد بود.

میدان مغناطیسی را هم می‌توان از پتانسیل اسکالر V_m و هم پتانسیل بُرداری $\underline{A}$ به دست آورد. اینکه استفاده از کدام پتانسیل مناسب‌تر است به طبیعت مسئله بستگی دارد. البته باید به خاطر داشت V_m را تنها در نواحی خالی از جریان می‌توان به کار بُرد. این شرط برای $\underline{A}$ وجود ندارد.

مثال ۶-۳۷: نشان دهید $\oint_s \underline{M}.d\underline{s} = -Q_M$، که در این رابطه $\underline{M}$ بُردار مغناطش و Q_M بار مغناطیسی مقید معادل است.

حل: با گرفتن انتگرال حجمی از $-\nabla.\underline{M} = \rho_M$ روی یک حجم دلخواه در جسم مغناطیس شده داریم

$$-\int_v \nabla.\underline{M}dv = \int_v \rho_M dv$$

سمت چپ رابطهٔ فوق را با استفاده از قضیهٔ دیورژانس به صورت زیر می‌نویسیم

$$\oint_s \underline{M}.d\underline{s} = -\int_v \rho_M dv = -Q_M$$

۶-۱۱ قانون گاوس برای $\underline{H}$

برای رسیدن به قانون گاوس برای $\underline{H}$، با استفاده از قضیهٔ دیورژانس می‌نویسیم

$$\oint_s \underline{H}.d\underline{s} = \int_v \nabla.\underline{H}dv = \int_v \nabla.(\frac{\underline{B}}{\mu_۰} - \underline{M})dv = \frac{۱}{\mu_۰}\int_v \nabla.\underline{B}dv + \int_v -\nabla.\underline{M}dv = \int_v -\nabla.\underline{M}dv$$

در بیشتر موارد $\underline{M}$ ناپیوسته است و مغناطش $\underline{M}$ در خارج جسم مغناطیده ناگهان صفر می‌شود. بنابراین $\nabla.\underline{M}$ در مرز بی‌نهایت می‌شود. برای رفع این مشکل نقاط تکین روی سطح را جداگانه حساب می‌کنیم. مطابق شکل، حجم جسم را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم، یک حجم داخلی و یک حجم پوسته‌ای در روی سطح. در این صورت

$$\int_v \nabla.\underline{H}dv = \int_{v_۱} -\nabla.\underline{M}\,dnds + \int_{v_۲} -\nabla.\underline{M}dv$$

۳) $۰/۳\,mA$ در جهت $-\underline{\hat{\varphi}}$

۴) $۰/۳\,mA$ در جهت $+\underline{\hat{\varphi}}$

حل: چون هر میلی‌متر سیم‌پیچ ۱۰ دور دارد بنابراین یک متر آن شامل $۱۰^{۴}$ دور خواهد بود یعنی سیم‌پیچ دارای $n = ۱۰^{۴}$ دور در واحد طول است. چگالی جریان سطحی سیم‌پیچ برابر $\mathcal{J}_s = nI = ۱۰^{۴}I\ {}^{A}/_{m}$ است. آهنربای دائم معادل سیم‌پیچی با جریان سطحی $\mathcal{J}_{Ms} = \underline{M} \times \underline{\hat{n}} = ۳\underline{\hat{z}} \times {}^{A}/_{m}\ \underline{\hat{\rho}} = ۳\underline{\hat{\varphi}}$ است. زمانی میدان مغناطیسی در مبدأ صفر است که اثرات این دو جریان سطحی، یکدیگر را خنثی کنند. یعنی $\mathcal{J}_s$ باید در جهت $-\underline{\hat{\varphi}}$ باشد و مقدار آن نیز برابر $\mathcal{J}_s = ۳$ باشد، بنابراین جریان عبوری از سیم‌پیچ باید $۳۰\ \mu A$ و در جهت $-\underline{\hat{\varphi}}$ باشد.

روش دوم: اگر بخواهیم میدان ناشی از سیم‌پیچ و آهنربا را حساب کنیم، چون در محیط جریان آزاد نداریم، برای محاسبهٔ میدان ناشی از آهنربا از روش پتانسیل مغناطیسی اسکالر استفاده می‌کنیم. بارهای مغناطیسی را محاسبه و جایگزین آهنربا می‌کنیم

$$\rho_{Ms} = \underline{M}.\underline{\hat{z}} = \begin{cases} ۳ & \text{سطح بالایی} \\ -۳ & \text{سطح پایینی} \end{cases}$$

$$\rho_M = -\nabla.\underline{M} = ۰$$

V_m را در نقطه‌ای دلخواه روی محور z محاسبه می‌کنیم

$$V_m = \frac{۱}{۴\pi}\oint_{s'} \frac{\rho'_{Ms}}{|\underline{r} - \underline{r}'|}ds' = \frac{۳}{۲}\left[(\sqrt{(z+h)^{۲} + a^{۲}} - (z+h)) - (\sqrt{(z+h+L)^{۲} + a^{۲}} - (z+h+L))\right]$$

و

$$\underline{H}_۱ = -\nabla V_m = -\frac{dV_m}{dz}\underline{\hat{z}} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{z+h+L}{\sqrt{(z+h+L)^{۲} + a^{۲}}} - \frac{z+h}{\sqrt{(z+h)^{۲} + a^{۲}}}\right)\underline{\hat{z}}$$

در نتیجه $\underline{H}$ در مبدأ $(z = ۰)$ برابر است با

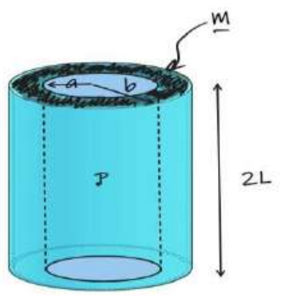
$$\underline{H}_۱ = \frac{۳}{۲}\left(\frac{h+L}{\sqrt{(h+L)^{۲} + a^{۲}}} - \frac{h}{\sqrt{h^{۲} + a^{۲}}}\right)\underline{\hat{z}}$$

شدت میدان مغناطیسی ناشی از سیم‌لوله در مبدأ با استفاده از $H = \frac{nI}{۲}(\cos\theta_۲ - \cos\theta_۱)$ عبارت است از

$$H_۲ = \frac{nI}{۲}\left(\frac{h+L}{\sqrt{(h+L)^{۲} + a^{۲}}} - \frac{h}{\sqrt{h^{۲} + a^{۲}}}\right)$$

برای صفر شدن $\underline{H}$ در مبدأ، اندازهٔ دو میدان $\underline{H}_۱$ و $\underline{H}_۲$ باید با هم برابر و جهت آنها خلاف یکدیگر باشد. برای تساوی اندازهٔ میدان‌ها در مبدأ، nI باید برابر ۳ باشد. در نتیجه $I = ۰/۳\,mA$ است. همچنین در صورتی که جریان سیم‌پیچ در جهت $-\underline{\hat{\varphi}}$ باشد، $\underline{H}_۲$ در جهت $-\underline{\hat{z}}$ خواهد بود و $\underline{H}_۱$ را در مبدأ خنثی می‌کند.

مثال ۶–۴۰: یک پوستهٔ استوانه‌ای از مادهٔ مغناطیسی به طول $۲L$ و شعاع‌های داخلی و خارجی a و b دارای بُردار مغناطیس شدگی غیریکنواخت $\underline{M} = M_۰\sin^{۲}\varphi\ \underline{\hat{z}}$ داده شده است. شدت میدان مغناطیسی $\underline{H}$ در نقطهٔ P واقع در مرکز استوانه کدام است؟ (ارشد برق ۹۲)



۱) $M_۰L\left(\frac{۱}{\sqrt{b^{۲}+L^{۲}}} - \frac{۱}{\sqrt{a^{۲}+L^{۲}}}\right)\underline{\hat{z}}$

۲) $\frac{M_۰L}{۴}\left(\frac{۱}{\sqrt{b^{۲}+L^{۲}}} - \frac{۱}{\sqrt{a^{۲}+L^{۲}}}\right)\underline{\hat{z}}$

۳) $\frac{M_۰L}{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{b^{۲}+L^{۲}}} - \frac{۱}{\sqrt{a^{۲}+L^{۲}}}\right)\underline{\hat{z}}$

۴) $\frac{M_۰L}{۸}\left(\frac{۱}{\sqrt{b^{۲}+L^{۲}}} - \frac{۱}{\sqrt{a^{۲}+L^{۲}}}\right)\underline{\hat{z}}$

حل: روش اول (بارهای مغناطیسی)

براساس $\underline{M}$ داده شده بارهای مغناطیسی مقید ρ_M و ρ_{Ms} را به صورت زیر حساب می‌کنیم

$$\rho_M = -\nabla.\underline{M} = ۰$$

$$\rho_{Ms} = \underline{M}.\underline{\hat{n}} = \begin{cases} M_۰\sin^{۲}\varphi & a < \rho < b \quad z = L \\ -M_۰\sin^{۲}\varphi & a < \rho < b \quad z = -L \end{cases}$$

چون بارهای مغناطیسی روی قاعدهٔ بالایی و پایینی قرینهٔ هم‌اند، لذا تعیین $\underline{H}$ ناشی از یکی از این قاعده‌ها در مرکز کافی است. $\underline{H}$ کُل را با فرض اینکه نقطهٔ P را منطبق بر مبدأ فرض کنیم به صورت زیر می‌نویسیم

$$\underline{H} = ۲\int_a^b \int_۰^{۲\pi} \frac{M_۰ sin^۲\varphi'\rho' d\rho' d\varphi'[۰ - (\rho'\underline{\hat{\rho}}' + L\underline{\hat{z}})]}{۴\pi(\rho'^۲ + L^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{M_۰ L}{۲}[\frac{۱}{\sqrt{b^۲ + L^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{a^۲ + L^۲}}]\underline{\hat{z}}$$

لذا گزینه ۳ درست است.

روش دوم (جریان‌های مقید)

جریان‌های مقید سطحی و حجمی را به صورت زیر می‌نویسیم. $\mathcal{J}_M$ فقط در جهت $\underline{\hat{r}}$ مؤلفه دارد. می‌دانیم جریان شعاعی در راستای خود میدان تولید نمی‌کند، بنابراین $\underline{B}$ ناشی از $\mathcal{J}_M$ صفر است. جریان مقید سطحی عبارت است از

$$\underline{\mathcal{J}_{Ms}} = \underline{M} \times \underline{\hat{n}} = \begin{cases} -M_۰ sin^۲\varphi\, \underline{\hat{\varphi}} & \rho = a \\ M_۰ sin^۲\varphi\, \underline{\hat{\varphi}} & \rho = b \end{cases}$$

میدان ناشی از این جریان در $\rho = a$ عبارت است از

$$\underline{B}_۱ = \int \frac{\mu_۰ \underline{\mathcal{J}'_{Ms}} ds' \times \underline{R}}{۴\pi R^۳} = \int \frac{-\mu_۰ M_۰ sin^۲\varphi' \underline{\hat{\varphi}}'\, a d\phi' dz' \times [-a\underline{\hat{\rho}}' - z'\underline{\hat{z}}]}{۴\pi(a^۲ + z'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$= -\frac{\mu_۰ M_۰ a^۲}{۴\pi}\underline{\hat{z}} \int_{-L}^{L}\int_۰^{۲\pi} \frac{sin^۲\varphi' d\varphi' dz'}{(a^۲ + z'^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\mu_۰ M_۰ L}{۲}\frac{۱}{\sqrt{a^۲ + L^۲}}(-\underline{\hat{z}})$$

برای $\underline{B}_۲$ نیز به همین صورت خواهیم داشت

$$\underline{B}_۲ = \frac{\mu_۰ M_۰ L}{۲}\frac{۱}{\sqrt{b^۲ + L^۲}}\underline{\hat{z}}$$

در نتیجه

$$\underline{H} = \frac{\underline{B}_۱}{\mu_۰} + \frac{\underline{B}_۲}{\mu_۰} = \frac{M_۰ L}{۲}\left[\frac{۱}{\sqrt{b^۲ + L^۲}} - \frac{۱}{\sqrt{a^۲ + L^۲}}\right]\underline{\hat{z}}$$

لذا گزینه ۳ درست است.

مثال ۶–۴۱: در فضای خالی دوقطبی‌های مغناطیسی بی‌نهایت کوچک هر یک با گشتاور $\underline{m} = m_۰\underline{\hat{z}}$ در ناحیهٔ استوانه‌ای شکل به شعاع a و ارتفاع h به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند، طوریکه تعداد آنها در واحد حجم عدد بسیار بزرگ N است. شدت میدان مغناطیسی در مرکز این ناحیهٔ استوانه‌ای شکل را $\underline{H}_۱$ می‌نامیم. اکنون هم شعاع و هم ارتفاع این ناحیه استوانه‌ای شکل را $\frac{۱}{۲}$ و تعداد دوقطبی‌ها در واحد حجم را نصف می‌کنیم. اگر شدت میدان مغناطیسی در مرکز ناحیهٔ استوانه‌ای در این حالت را $\underline{H}_۲$ بنامیم. نسبت $\frac{|\underline{H}_۲|}{|\underline{H}_۱|}$ چیست؟

حل: با استفاده از روش بارهای مغناطیسی، $\underline{H}$ را حساب می‌کنیم. ρ_M و ρ_{Ms} برای حالت اول به قرار زیر است

$$\rho_{Ms} = \underline{M}\cdot\underline{\hat{n}} = \begin{cases} Nm_۰\underline{\hat{z}}\cdot\underline{\hat{z}} = Nm_۰ & z = \frac{h}{۲} \\ Nm_۰\underline{\hat{z}}\cdot(-\underline{\hat{z}}) = Nm_۰ & z = -\frac{h}{۲} \end{cases}$$

و

$$\rho_M = -\nabla\cdot\underline{M} = ۰$$

میدان ناشی از این دو صفحهٔ باردار در مبدأ با هم برابرند. برای محاسبهٔ میدان ناشی از صفحهٔ بالایی، مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز استوانه در نظر گرفته، می‌نویسیم

$$\underline{H} = \int \frac{\rho'_{Ms} ds'}{۴\pi R}\underline{R} = \int \frac{Nm_۰ \rho' d\rho' d\varphi'}{۴\pi[\rho'^۲ + (\frac{h}{۲})^۲]^{\frac{۳}{۲}}}[\rho'\underline{\hat{\rho}}' - \frac{h}{۲}\underline{\hat{z}}]$$

$$= -\frac{Nm_۰}{۴\pi}\underline{\hat{z}}\, ۲\pi\int_۰^a \frac{\rho' d\rho'}{[\rho'^۲ + (\frac{h}{۲})^۲]^{\frac{۳}{۲}}} = -\frac{Nm_۰}{۲}\underline{\hat{z}}\left[\frac{-۱}{\sqrt{\rho'^۲ + (\frac{h}{۲})^۲}}\right]_۰^a = \frac{Nm_۰}{۲}\left[۱ - \frac{\frac{h}{۲}}{\sqrt{a^۲ + (\frac{h}{۲})^۲}}\right]\underline{\hat{z}}$$

با در نظر گرفتن صفحهٔ پایینی، $\underline{H}_۱$ به صورت زیر در می‌آید

$$\underline{H}_۱ = ۲\times\frac{Nm_۰}{۲}\left[۱ - \frac{\frac{h}{۲}}{\sqrt{a^۲ + (\frac{h}{۲})^۲}}\right]\underline{\hat{z}} = Nm_۰\left[۱ - \frac{\frac{h}{۲}}{\sqrt{a^۲ + (\frac{h}{۲})^۲}}\right]\underline{\hat{z}}$$

از نتیجه به دست آمده می‌توان استفاده کرد و $\underline{H}_۲$ را به صورت زیر نوشت

$$\underline{H}_{۲}=۲\times\frac{\frac{N}{۲}m_{.}}{۲}\left[۱-\frac{\frac{h/۳}{۲}}{\sqrt{(\frac{a}{۳})^{۲}+(\frac{h/۳}{۲})^{۲}}}\right]\hat{\underline{z}}=\frac{Nm_{.}}{۲}\left[۱-\frac{\frac{h}{۲}}{\sqrt{a^{۲}+(\frac{h}{۲})^{۲}}}\right]\hat{\underline{z}}$$

بنابراین $\frac{|\underline{H}_{۲}|}{|\underline{H}_{۱}|}=\frac{۱}{۲}$ است.

روش دوم: چون هم شعاع و هم ارتفاع نصف شده است، زاویهٔ دیده شده از دو سر سیم لوله ثابت می‌ماند و فقط چگالی جریان مغناطیسی مقید تغییر می‌کند که آن‌هم فقط وابسته به تعداد دوقطبی‌ها در واحد حجم است، در نتیجه

$$\frac{|\underline{H}_{۲}|}{|\underline{H}_{۱}|}=\frac{N_{۲}}{N_{۱}}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۶-۴۲: پتانسیل مغناطیسی اسکالر V_m را روی محور حلقه‌ای با جریان I و شعاع a بیابید.

حل: حلقه را در صفحه xy و مرکز آن را منطبق بر مبدأ در نظر می‌گیریم، می‌دانیم شدت میدان روی محور حلقه (محور z) عبارت است

$$\underline{H}=\frac{I\,a^{۲}}{۲(a^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\hat{\underline{z}}$$

مشابهٔ $V=\int\underline{E}.d\underline{\ell}$ داریم $V_m=\int\underline{H}.d\underline{\ell}$، چون توزیع جریان محدود است، در نتیجه مرجع پتانسیل را بی‌نهایت فرض می‌کنیم و برای محاسبهٔ پتانسیل در نقطهٔ P، از نقطهٔ P در امتداد محور z تا بی‌نهایت حرکت می‌کنیم.

$$V_m=\int_{z}^{\infty}\frac{I\,a^{۲}}{۲(a^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\hat{\underline{z}}.dz\,\hat{\underline{z}}=\frac{I\,a^{۲}}{۲}\int_{z}^{\infty}\frac{dz}{(a^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{I\,a^{۲}}{۲}\left[\frac{z}{a^{۲}(a^{۲}+z^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}\bigg|_{z}^{\infty}\right]=\frac{I}{۲}\left[۱-\frac{z}{\sqrt{a^{۲}+z^{۲}}}\right]$$

پتانسیل مغناطیسی اسکالر را می‌توان به این صورت نیز به دست آورد که براساس $\underline{H}=-\nabla V_m$ و میدان روی محور حلقه بنویسیم

$$\frac{\partial V_m}{\partial z}=-\frac{I\,a^{۲}}{۲(a^{۲}+z^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow V_m=-\frac{I}{۲}\frac{z}{\sqrt{a^{۲}+z^{۲}}}+c$$

ثابت c با توجه به اینکه مقدار پتانسیل مغناطیسی اسکالر در $z=\infty$ برابر صفر است، به صورت زیر به دست می‌آید

$$\lim_{z\to\infty}V_m=\lim_{z\to\infty}\left(-\frac{I}{۲}\frac{z}{\sqrt{a^{۲}+z^{۲}}}+c\right)=۰\Rightarrow c=\frac{I}{۲}$$

و در نهایت

$$V_m=\frac{I}{۲}\left[۱-\frac{z}{\sqrt{a^{۲}+z^{۲}}}\right]$$

مثال ۶-۴۳: حلقه جریانی در صفحهٔ $z=۰$ و مرکز واقع در مبدأ با جریان I آمپر در جهتِ $\hat{\underline{\varphi}}$ مفروض است. شعاع حلقه a و پتانسیل مغناطیسی عددی حلقه در مبدأ صفر فرض می‌شود. در چه نقطه‌ای روی محور zها پتانسیل مغناطیسی عددی نصف مقدارش در بی‌نهایت می‌شود.

حل: می‌دانیم $\underline{H}$ ناشی از حلقه جریانِ I روی محور z برابر است با

$$\underline{B}=\frac{Ia^{۲}}{۲(z^{۲}+a^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\hat{\underline{z}}$$

با توجه به اینکه مبدأ پتانسیل در $z=۰$ است، پتانسیل مغناطیسی عددی در نقطهٔ z برابر است با

$$V_m=\int_{z}^{۰}\underline{H}.d\underline{\ell}=\int_{z}^{۰}\frac{Ia^{۲}}{۲(z'^{۲}+a^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}dz'=-\frac{I}{۲}\frac{z}{\sqrt{z^{۲}+a^{۲}}}$$

مقدار این پتانسیل در بی‌نهایت $-\frac{I}{۲}$ است؛ بنابراین نقطه‌ای که در آن پتانسیل مغناطیسی عددی نصف مقدارش در بی‌نهایت باشد، برابر است با

$$-\frac{I}{۲}\frac{z_{.}}{\sqrt{z_{.}^{۲}+a^{۲}}}=-\frac{I}{۴}\Rightarrow z_{.}=\frac{a}{\sqrt{۳}}$$

توجه: V_m را به این صورت نیز می‌توان به دست آورد که از $\underline{H}=-\nabla V_m$ خواهیم داشت

$$\nabla V_m=\frac{\partial V_m}{\partial z}=-\frac{Ia^{۲}}{۲(z^{۲}+a^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow V_m=-\frac{Iz}{۲\sqrt{z^{۲}+a^{۲}}}+c$$

چون در $z=۰$، $V_m=۰$ است، در نتیجه ثابت $c=۰$ است و خواهیم داشت

$$V_m=-\frac{Iz}{۲\sqrt{z^{۲}+a^{۲}}}$$

نقطهٔ M نسبت به سیم سمت راست در $\varphi = \pi$ قرار دارد، بنابراین

$$V_{m2} = -\frac{I}{2} + c$$

در نتیجه

$$V_{m1} - V_{m2} = \frac{I}{2}$$

توجه داشته باشید واحد **پتانسیل مغناطیسی اسکالر**، **آمپر** است.

۶-۱۳ جمله مشترک $\frac{1}{4\pi}\int \frac{R}{R^3}dv'$ در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

معادلات $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho_v(\underline{r}')dv'}{R^3}\underline{R}$، $V(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\underline{P}(\underline{r}').\underline{R}}{R^3}dv'$، $\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\underline{M}(\underline{r}')\times\underline{R}}{R^3}dv'$، $\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\underline{J}(\underline{r}')\times\underline{R}}{R^3}dv'$ و یا $V_m(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\underline{M}(\underline{r}').\underline{R}}{R^3}dv'$ را در نظر بگیرید. در تمام این معادلات اگر ρ_v، $\underline{P}$، $\underline{J}$ و $\underline{M}$ ثابت باشند، انتگرال $\frac{1}{4\pi}\int \frac{\underline{R}}{R^3}dv'$ وجود خواهد داشت؛ بنابراین اگر میدان الکتریکی ناشی از جسمی با بار یکنواخت را بدانید، بلافاصله می‌توانید پتانسیل اسکالر جسمی با همین شکل، قطبیده شده به صورت یکنواخت، میدان مغناطیسی ناشی از جسمی با همین شکل و با جریان یکنواخت و پتانسیل جسمی با همین شکل، مغناطیده شده به صورت یکنواخت را بنویسید.

به عنوان مثال از قانون گاوس برای کُره‌ای به شعاع a و بار یکنواخت $\rho_v = 1$ داریم

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\underline{R}}{R^3}dv' = \begin{cases} \frac{r}{3\epsilon_0}\hat{\underline{r}} & r \le a \\ \frac{1}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{r^2}\hat{\underline{r}} & r > a \end{cases}$$

در نتیجه پتانسیل اسکالر درون و بیرون کُره‌ای به شعاع a که به صورت یکنواخت قطبیده شده، عبارت است از

$$V(\underline{r}) = \underline{P}.\underline{E} = \underline{P}.[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\underline{R}}{R^3}dv'] = \begin{cases} \frac{r}{3\epsilon_0}\underline{P}.\hat{\underline{r}} & r \le a \\ \frac{1}{3\epsilon_0}\frac{a^3}{r^2}\underline{P}.\hat{\underline{r}} & r > a \end{cases}$$

و یا پتانسیل بُرداری داخل و خارج کُره‌ای به شعاع a که به صورت یکنواخت مغناطیده شده، عبارت است از

$$\underline{A}(\underline{r}) = \mu_0\epsilon_0\underline{M}\times\underline{E} = \mu_0\epsilon_0\underline{M}\times[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\underline{R}}{R^3}dv'] = \begin{cases} \frac{\mu_0 r}{3\epsilon_0}\underline{M}\times\hat{\underline{r}} & r \le a \\ \frac{\mu_0}{3}\frac{a^3}{r^2}\underline{M}\times\hat{\underline{r}} & r > a \end{cases}$$

همین شیوه را برای استوانهٔ طویلی به شعاع a و چگالی بار $\rho_v = 1$ نیز می‌توان استفاده کرد. برای چنین استوانه‌ای

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\underline{R}}{R^3}dv' = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon_0}\hat{\underline{\rho}} \\ \frac{a}{2\epsilon_0\rho}\hat{\underline{\rho}} \end{cases}$$

در ادامه یک مثال را یکبار به روش بارهای مغناطیسی و یکبار با کمک روشِ جمله مشترک حل می‌کنیم

مثال ۶-۴۷: کُره‌ای به شعاع a دارای مغناطش یکنواخت $\underline{M} = M_0\hat{\underline{z}}$ است. میدان مغناطیسی داخل و خارج کُره را بیابید.

حل: از روش پتانسیل مغناطیسی اسکالر و بارهای مغناطیسی استفاده می‌کنیم.

$$\rho_M = -\nabla.\underline{M} = 0 \quad , \quad \rho_{Ms} = \underline{M}.\hat{\underline{n}} = M_0\hat{\underline{z}}.\hat{\underline{r}} = M_0\cos\theta$$

پتانسیل داخل و خارج کُره را برحسب توابع لژاندر می‌نویسیم. چون بارِ روی کُره تنها تابع $\cos\theta$ است، فقط جملات شامل $\cos\theta$ باقی می‌مانند

$$V_{m1} = A_1 r\cos\theta + \frac{B_1\cos\theta}{r^2} \qquad r < a$$

$$V_{m2} = A_2 r\cos\theta + \frac{B_2\cos\theta}{r^2} \qquad r > a$$

برای محدود بودن پتانسیل در مرکز کُره B_1 باید صفر باشد و برای محدود بودن پتانسیل در بی‌نهایت A_2 باید صفر باشد. در سطح کُره پتانسیل باید پیوسته باشد، پس

$$A_1 a\cos\theta = \frac{B_2\cos\theta}{a^2} \Rightarrow B_2 = A_1 a^3$$